SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

E. LANCONELLI

FORMULE DI MEDIA PER OPERATORI PARABOLICI

4 FEBBRAIO 1988

SUNTO. Vengono presentate alcune nuove formule di media e di rappresentazione per le soluzioni classiche di equazioni lineari paraboliche in R^{n+1} a coefficienti regolari. Tale formule vengono successivamente utilizzate per approssimare le funzioni superparaboliche mediante successioni di funzioni super-paraboliche di classe C^k, essendo k un arbitrario fissato numero naturale. I risultati esposti sono provati nella nota [GL2].

1. In molte questioni di Teoria del potenziale si presenta la necessità di approssimare le funzioni super-armoniche in R^n mediante successioni di funzioni super-armoniche di assegnata regoalrità C^k, $k \geq 0$. E' ben noto che questi procedimenti di approssimazione possono venire realizzati mediante gli usuali operatori di mollificazione. Nella stessa maniera si può procedere per le supertemperature in R^{n+1}, cioè per le soprasoluzioni dell'operatore del calore $H = \Delta - \partial_t$. Infatti, se $u \in L^1_{loc}(R^{n+1})$ è tale che $Hu \leq 0$ (nel senso delle distribuzioni) e se $J_\varepsilon * u$ è l'usuale operatore di moltiplicazione, poiché H è un operatore a coefficienti costanti, risulta

$$H(J_\varepsilon * u) = J_\varepsilon * Hu \leq 0 \quad , \quad J_\varepsilon * u \quad C^\infty(R^{n+1})$$

Evans e Gariepy ([EG]) nella loro prova del criterio di Wiener usano in modo essenziale tale procedimento di approssimazione.

Volendo estendere il criterio di Wiener agli operatori parabolici

$$L = \sum_{ij=1}^{n} \partial_i (a_y(z) \partial_j) - \partial_t,$$

$(z = (x,t) \in R^n x R$, $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $\partial_t = \partial/\partial_t)$ si presenta in modo naturale il problema di approssimazione sopra descritto, nel contesto più generale degli operatori a coefficienti variabili, contesto nel quale gli usuali mollificatori sono del tutto inefficaci. Basta infatti osservare che $J_\varepsilon * u$ *non* è soluzione dell'equazione $Lv = 0$ se u lo è.

Per affrontare in modo adeguato il problema di approssimazione sopra esposto per gli operatori a coefficienti variabili, ci si può ispirare al più classico dei metodi di regolarizzazione delle funzioni superarmoniche in R^n, basato sull'uso degli operatori di media

$$u \to u_r, \quad \text{dove} \quad u_r(x) = \fint_{|x-y|<r} u(y)dy$$

E' ben noto che l'operatore $u \to u_r$ è un operatore che preserva la superarmonicità. Inoltre, se $u \in L^1_{loc}(R^n)$, allora $u_r \in C(R^n)$ e, se $u \in C(R^n)$ allora $u \in C^1(R^n)$ e

$$D_j u_r(x) = \int_{\partial B(0,r)} u(x+y)d\sigma(y)$$

Da questa formula segue facilmente che $u_r \in C^{k+1}$ se $u \in C^k$. Inoltre, se u è superarmonica, allora $u_r \uparrow u$ per $r \downarrow 0$. Pertanto, se u è superarmonica in R^n, fissato $m \in N$ e posto

$$v_r = (\ldots\underbrace{((u_r)_r)_r \ldots)_r}_{m+1} \quad ,$$

risulta $v_r \in C^m$, v_r superarmonica e $v_r \uparrow u$ per $r \downarrow 0$.

La regolarizzazione delle funzioni superarmoniche si può anche ottenere mediante un procedimento di *superposizione* delle medie u_r.

Sia $\phi \in C^\infty(R,R)$ tale che $0 \leq \phi \leq 1$, supp $\phi \subseteq]0,1[$ e

$$\int_0^1 \phi(t)dt = 1.$$

Per ogni $r>0$ poniamo

$$J_r u(x) = \int_0^{+\infty} u_\rho(x) \quad (\frac{\rho}{r}) \frac{d\rho}{r} .$$

Dalle proprietà di u_ρ si deduce subito che J_r preserva la superarmonicità; inoltre $J_r u \uparrow u$ per $r \downarrow 0$ se u è superarmonica.

Si ha poi (ω_n = misura di B(0,1))

$$J_r u(x) = \int_0^{+\infty} \left(\int_{|x-y|<\rho} u(y)dy \right) \frac{1}{\omega_n \rho^n} \phi\left(\frac{\rho}{r}\right) \frac{d\rho}{r} =$$

$$= \int_{R^n} u(y) \psi\left(\frac{|x-y|}{r}\right) r^{-n} dy$$

dove abbiamo posto

$$\psi(t) = \int_t^{+\infty} \omega_n \frac{\phi(s)}{s^n} ds.$$

Ovviamente $\in C_0^\infty(R^n)$, $0 \le \psi \le \int_0^{+\infty} \omega_n \frac{(s)}{s^n} ds$ e

$$\int_{R^n} \psi(y)dy = 1.$$

$J_r u$ è quindi l'usuale operatore di mollificazione e $J_r u \in C^\infty(R^n)$ se $u \in L_1^{loc}(R^n)$.

Si può quindi presumere che, disponendo di formule di media per le soluzioni dell'equazione a coefficienti variabili $Lu = 0$, a partire da quelle, mediante un procedimento di superposizione, si ottengano i *naturali* mollificatori per l'operatore L.

2. In R^{n+1} consideriamo l'operatore parabolico

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n \partial_i (a_{ij}(z) \partial_j) - \partial_t$$

dove $a_{ij} = a_{ji} \in C^\infty(R^n)$ ed esiste $\nu > 0$:

$$\nu^{-1}|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(z)\xi_i\xi_j \le \nu|\xi| \qquad \forall z \in R^{n+1}, \ \ \forall \xi \in R^n.$$

Supponiamo inoltre che esista un compatto $F_o \subset R^{n+1}$: $a_{ij}(z) = \delta_{ij}$ per ogni $z \notin F_o$. Sotto queste ipotesi esiste per L una soluzione fondamentale $\Gamma(z,\zeta)$ di classe C^∞ nel complementare della diagonale di $R^{n+1} \times R^{n+1}$. Per ogni z R^{n+1} e per ogni $r>0$ chiamiamo L- *palla parabolica di centro* z *e raggio* r l'insieme

$$\Omega_r(z) = \{\zeta \in R^{n+1} / \Gamma(z,\zeta) > (4\pi r)^{-n/2}\}$$

In [GL.2] abbiamo provato la seguente formula di rappresentazione per le funzioni $u \in C^2(R^{n+1})$:

$$(2.1) \qquad u(z) = u_r(z) - \frac{n}{2} r^{-n/2} \int_0^r \ell^{n/2} \Big(\int_{\Omega_\ell(z)} Lu(\zeta)[\Gamma(z,\zeta) - (4\pi\ell)^{-n/2}] d\zeta \Big) d\ell$$

dove

$$(2.2) \qquad u_r(z) = (4\pi r)^{-u/2} \int_{\Omega_r(z)} u(\zeta) E(z,\zeta) d\zeta,$$

$$E(z,\zeta) = \frac{A(\zeta) D_\xi \Gamma(z,\zeta) \cdot D_\xi \Gamma(z,\zeta)}{\Gamma^2(z,\zeta)} \quad , \quad A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$$

In particolare $Lu = 0$ in R^{n+1} se e solo se

$$u(z) = u_r(z) \quad \forall r>0 \quad , \quad \forall z \in R^{n+1}$$

(questo risultato è anche provato in [FG]).

Ora il nucleo $E_r = (4\pi r)^{-n/2} E$ che compare nell'operatore di media $u \to u_r$ *non* è regolare. Infatti se, ad esempio, $L = \Delta - \partial_t$ è l'operatore del calore in R^{n+1} si ha

$$E_r(z,\zeta) = (4\pi r)^{-n/2} \; |x-\xi|^2/4(t-\tau)^2$$

Per ottenere formule di media con nuclei più regolari di E_r, procediamo nel modo seguente. Anzitutto derivando (2.1) rispetto ad r si ottiene

$$\frac{d}{dr}\, u_r(z) = \frac{n}{2r}(4\pi r)^{-n/2} \int_{\Omega_r(z)} Lu(\zeta)\, \ln((4\pi r)^{n/2}\Gamma(z,\zeta))d\zeta$$

Integrando queste identità rispetto ad r, dopo aver osservato che

$$u_r(z) \to u(z) \quad \text{per} \quad r \to 0,$$

si ricava

$$(2.3) \qquad u(z)=u_r(z)- \frac{n}{2}(4\pi)^{-n/2}\int_0^r \ell^{-n/2-1}\Big(\int_{\Omega_\ell(z)} Lu(\zeta)\ln((4\pi\ell)^{n/2}\Gamma(z,\zeta)d\zeta\Big)d\ell.$$

Seguendo un'idea già utilizzata da Kupcov ([K]) nel caso di $L = \Delta-\partial_t$, fissiamo ora $m\in \mathbb{N}$ e consideriamo in R^{n+m+1} l'operatore

$$\hat{L} = L + \Delta_y$$

dove Δ_y indica l'operatore di Laplace in R^m. Ora, poiché

$$\hat{L}(u(x,t)v(y,t)) = (Lu)v + u(\Delta_y-\partial_t)v,$$

è facile riconoscere che la soluzione fondamentale $\hat{\Gamma}$ di $\hat{L}$ si scrive nel modo seguente

$$\hat{\Gamma}(x,y,t;\xi,\eta,\tau) = \Gamma(x,t;\xi,\tau)K(y-\eta,t-\tau)$$

dove K è la soluzione fondamentale di $\Delta_y - \partial_t$:

$$K(y-\eta,t-\tau) = (4\pi(t-\tau))^{-m/2}\exp(-\frac{|y-\eta|^2}{4(t-\tau)}) \quad \text{per} \quad t > \tau .$$

Applichiamo ora la formula di rappresentazione (2.3) alla funzione

$$\hat{u}(\hat{z}) = \hat{u}(x,y,t) = u(x,t)$$

ed all'operatore $\hat{L}$. Si ha

$$u(z)=\hat{u}_r(x,y,t)-\frac{n+m}{2}(4\pi)^{-\frac{n+m}{2}}\int_0^r \ell^{-\frac{n}{2}-1}\left(\int_{\hat{\Omega}_\ell(z)} Lu(\zeta)\ln((4\pi)^{\frac{n+m}{2}}\hat{\Gamma}(\hat{z},\hat{\zeta}))d\zeta\right)d\ell \tag{2.4}$$

dove

$$\hat{u}_r(\hat{z})=(4\pi r)^{-\frac{n+m}{2}}\int_{\hat{\Gamma}(\hat{z},\hat{\zeta})>(4\pi r)^{-n+m/2}} \hat{u}(\hat{\zeta})\hat{E}(\hat{z},\hat{\zeta})d\hat{\zeta}$$

$$= (4\pi r)^{-\frac{n+m}{2}}\int_{\hat{\Gamma}(\hat{z},\hat{\zeta})>(4\pi r)^{-n+m/2}} u(\zeta)[E(z,\zeta)+\frac{|y-\eta|^2}{4(t-\tau)^2}]d\xi d\eta dt. \tag{2.5}$$

Ora $\hat{\Gamma}(\hat{z},\hat{\zeta}) > (4\pi r)^{-\frac{n+m}{2}}$ se e solo se

$$\phi(z,\zeta) \equiv (4\pi(t-\tau))^{-m/2}\Gamma(z,\zeta)>\exp(\frac{|y-\eta|^2}{4(t-\tau)})\ (4\pi r)^{-\frac{n+m}{2}}$$

od anche se, e solo se,

$$|y-\eta|^2 \le 4(t-\tau)\ln((4\pi r)^{\frac{n+m}{2}}\phi(z,\zeta)) \equiv R_r^2(z,\zeta)$$

Eseguendo nell'integrale all'ultimo membro della (2.5) l'integrazione rispetto al la variabile η, si ottiene

$$(2.6) \qquad \hat{u}_r(\hat{z}) = \int_{\Omega_r^{(m)}(z)} u(\zeta)\, E_r^{(m)}(z,\zeta)d\zeta$$

dove

$$(2.7) \qquad \Omega_r^{(m)}(z) = \{\zeta\in R^n \mid \phi(z,\zeta) > (4\pi r)^{-\frac{n+m}{2}}\}$$

e

$$(2.8) \qquad E_r^{(m)}(z,\zeta) = (4\pi r)^{-\frac{n+m}{2}} R_r^m(z,\zeta)\left(E(z,\zeta) + \frac{m}{n+2}\frac{R_r^2(z,\zeta)}{4(t-\tau)^2}\right)$$

Notiamo che al secondo membro della (1.6) la variabile aggiunta y non appare più. Procedendo in modo analogo anche nel secondo integrale al secondo membro di (2.4), infine si ottiene

$$(2.9) \qquad u(z) = u_r^{(m)}(z) - C_{n,m}\int_0^r \ell^{-\frac{n+m}{2}}\left(\int_{\Omega_\ell^{(m)}(z)} Lu(\zeta)\frac{R_\ell^{m+2}(z,\zeta)}{4(t-\tau)}\, d\zeta\right)d\ell$$

dove $C_{n,m}$ è una costante positiva che dipende solo da n e da m; inoltre

$$(2.10)\qquad u_r^{(m)}(z) = \int_{\Omega_r^{(m)}(z)} u(\zeta)E_r^{(m)}(z,\zeta)d\zeta$$

Dalla (2.9) si ricava subito che $Lu=0$ se e solo se $u = u_r^{(m)}$ per ogni $r>0$.

Il nucleo $E_r^{(m)}$ che figura in (2.10) è tanto più regolare quanto più m è grande. Infatti

$$R_r^2(z,\zeta) = (t-\tau)O(\ln(t-\tau)) \quad \text{per } t \to \tau$$

Dagli operatori di media $u \to u_r^{(m)}$, con un procedimento di superposizione analogo a quello descritto precedentemente nel caso armonico classico, si possono facilmente ottenere operatori di regolarizzazione che, come vedremo, conservano il segno di Lu. Scegliamo una funzione $\phi \in C_0^\infty(R^+)$ tale che

$$\phi \geq 0 \quad , \quad \text{supp}\phi \subseteq]1,2[\quad , \quad \int_0^{+\infty} \phi(r)dr = 1.$$

Per ogni $m \in N$ definiamo

$$J_r^{(m)}u(z) = \int_0^{+\infty} u_\ell^{(m)}(z) \quad (\tfrac{\ell}{r}) \; \frac{d\ell}{r} \quad .$$

Sostituendo ad u_ℓ la sua espressione data da (2.10), dopo uno scambio dell'ordine di integrazione, si ottiene

$$J_r^{(m)}u(z) = \int_{R^{n+1}} u(\zeta)M_r^{(m)}(z,\zeta)d\zeta$$

dove

$$M_r^{(m)}(z,\zeta) = \int_{(4\pi\phi(z,\zeta))^{2/n+m}-1}^{+\infty} E_\ell^{(m)}(z,\zeta)\ (\frac{\ell}{r})\ \frac{d\ell}{r}$$

Si osservi che $M_r^{(m)}(z,\cdot)$ ha il supporto contenuto nella palla parabolica $\Omega_{2r}^{(m)}(z)$ in quanto supp $\phi \subseteq]1,2[$.

A questo punto, utilizzando gli sviluppi asintotici di Γ e delle sue derivate provati in [GL.2], si dimostra con relativa facilità il seguente

Lemma. *Per ogni* $\nu \in N$ *e per ogni multi-indice intero non negativo* $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1})$ *tale che* $|\alpha|\leq\nu$, *esistono* $m=m(\nu)\in N$ *ed una costante* $C=C(\alpha,r,m)>0$ *tali che*

$$|D_z^\alpha M_r^{(m)}(z,\zeta)| \leq C \qquad \forall z \neq \zeta .$$

Fissato quindi $\nu\in N$ esiste $m\in N$ tale che $J_r^{(m)}u\in C^\nu$ per ogni $u\in L^1_{loc}(R^{n+1})$.

3. In questo paragrafo illustreremo la connessione esistente fra gli operatori $u \to u_r^{(m)}$ e $J_r^{(m)}$ e le funzioni super L-paraboliche.

Un aperto $V\subseteq R^{n+1}$ si dice L-regolare se il problema al contorno

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{in } V \\ u/\partial V = \phi \end{cases}$$

ha una (sola) soluzione $u\in C^\infty(V)\cap C(\bar V)$, per ogni $\phi\in C(\partial V)$.

Indichiamo tale soluzione con H_ϕ^V. Ebbene, una funzione $u:R^{n-1}\to R\cup\{+\infty\}$ si dice super L-parabolica se u è inferiormente semicontinua, finita in un sottoinsieme denso di R^{n+1} e se inoltre, per ogni aperto L-regolare V e per ogni

$\phi \in C(\partial V)$ con $\phi \leq u/\partial V$, risulta $H\phi \leq u$ in V. Si può provare (Cfr. ad es. [NS]) che una funzione u è super L-parabolica se e solo se $u \in L_1^{loc}(R^n)$ e $Lu \leq 0$ in $\mathscr{D}'(R^n)$.

Utilizzando questo risultato e la formula di rappresentazione (2.9), si può provare che u *è super* L-*parabolica se e solo se*

$$u \geq u_r^{(m)} \qquad r \quad]0,r_0[.$$

Un'altra fondamentale proprietà degli operatori $u \to u_r^{(m)}$ è la seguente: *se* u *è super* L-*parabolica in* R^{n+1} *allora anche* $u_r^{(m)}$ *lo è.*

La prova di questa affermazione non è semplice come le precedenti e si basa sulla idea seguente: poichè u è super L-parabolica, per un teorema di rappresentazione di tipo Rierz risulta, almeno localmente,

$$(3.1) \qquad u = \Gamma_\mu + h$$

dove $h \in C^\infty$, $Lh = 0$, μ è una misura di Radon non negativa e Γ_μ è il Γ potenziale di μ:

$$\Gamma_\mu(z) = \int_{R^{n+1}} \Gamma(z,\zeta)\ d_\mu(\zeta)$$

D'altra parte, per i risultati precedenti, per provare che u_r è super L-parabolica, basta provare che u_r verifica la proprietà di super-media:

$$(3.2) \qquad u_r \geq (u_r)_\rho$$

per ogni $\rho \leq \rho_0$. Utilizzando la (3.1) la verifica di (3.2) viene ricondotta alla seguente

$$(3.3) \qquad ((\Gamma(\cdot,\zeta))_r)_\rho \leq (\Gamma(\cdot,\zeta))_r$$

per ogni $\rho \leq \rho_0$ e per ogni $\zeta \in R^{n+1}$. Le (3.3) viene provata direttamente utilizzando in modo essenziale ancora la formula di rappresentazione (2.9).

Una ulteriore proprietà degli operatori $u_r^{(m)}$ è la seguente: se u è super-parabolica in R^{n+1} allora $u_r^{(m)} \nearrow u$ per $r \searrow 0$.

Ora, per superposizione, tutte le proprietà enunciate di sopra per gli operatori $u \to u_r^{(m)}$ si estendono immediatamente agli operatori $J_r^{(m)}$. Si ottiene così il seguente

<u>Teorema</u>. *Sia* u *una funzione super* L-*parabolica in* R^{n+1} *e sia* $\nu \in N$ *fissato. Allora esiste una successione di funzioni* (u_j) *tali che:*

(i) $u_j \in C^{\nu}(R^{n+1})$ $\forall j \in N$

(ii) u_j *è super L-parabolica in* R^{n+1} $\forall j \in N$

(iii) $u_j \nearrow u$ *per* $j \to +\infty$.

<u>Dimostrazione</u>. Basta porre $u_j = J_{r_j}^{(m)} u$ con m N sufficientemente grande e con $r_j \searrow 0$.

4. Le formule di medie provate nei precedenti paragrafi e gli sviluppi asintotici di Γ e delle sue derivate provate in [GL2] possono venire utilizzate per dimostrare in modo del tutto elementare la disuguaglianza di Harnack per le soluzioni non negative dell'equazione $Lu = 0$.

<u>Teorema</u>. *Sia* D *un aperto di* R^{n+1} *e sia* $u \geq 0$ *una soluzione di* $Lu=0$. *Sia* $z_0 \in D$ *e sia* $r_0 > 0$ *tale che* $\Omega_{4r}^{(m)}(z_0) \subseteq D$. (m *è un fissato naturale* > 2). *Fissato* $\varepsilon \in]0,1[$, *sia* $z = (x,t) \in \Omega_r^{(m)}(z_0)$ *con* $t - t_0 \geq \varepsilon r$. *Allora*

$$u(z) \leq Cu(z_0)$$

dove $C = C(L,m,\varepsilon)$.

Dimostrazione. Poichè Lu = 0 risulta

$$u(z_o) = \int_{\Omega^{(m)}_{3r}(z_o)} u(\zeta)\, E^{(m)}_{3r}(z_o,\zeta)d\zeta.$$

Ora se $z = (x,t)\in \Omega^{(m)}_{r}(z_o)$ e $t-t_o \geqq \varepsilon r$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che

$$\Omega^{(m)}_{\delta r}(z)\subseteq \Omega^{m}_{3r}(z_o).$$

Pertanto, poichè $u \geqq 0$,

$$u(z_o) \geqq \int_{\Omega^{(m)}_{\delta r}(z)} u(\zeta)\, E^{(m)}_{3r}(z,\zeta)d\zeta =$$

$$= \int_{\Omega^{(m)}_{\delta r}(z)} u(\zeta)\, E^{(m)}_{\delta r}(z,\zeta)\, \frac{E^{(m)}_{3r}(z_o,\zeta)}{E^{(m)}(z,\zeta)}\, d\zeta$$

Ora, esistono due costanti positive C_1 e C_2, indipendenti da r, tali che

$$E^{(m)}_{3r}(z_o,\zeta) \geqq C_1\, r^{-\frac{n}{2}+1} \quad \forall\zeta\in\Omega^{(m)}_{\delta r}(z),$$

$$E^{(m)}_{\delta r}(z,\zeta) \leqq C_2 r^{-\frac{n}{2}+1} \quad \forall\zeta\in\Omega^{(m)}_{\delta r}(z) .$$

Pertanto

$$u(z_o) \geqq \frac{C_1}{C_2} \int_{\Omega^{(m)}_{\delta r}(z)} u(\zeta)\, E^{(m)}_{\delta r}(z,\zeta)d\zeta = \frac{C_1}{C_2}\, u(z).$$

BIBLIOGRAFIA

[EG] L.C. EVANS, R.F. GARIEPY, Wiener's criterion for the heat equation, Arch. Rat. Mech. An. 78 (1982), 293-314.

[FG] E.B. FABES, N. GAROFALO, Mean value properties of solution to parabolic equation with variable coefficients, Journal of Math. An. Appl. 121 (1987), 305-316.

[GL1] N. GAROFALO, E. LANCONELLI, Wiener's criterion for parabolic equations with variable coefficients and its consequences, to appear in Trans. Amer. Math. Soc.

[GL2] ——————————, Asymptotic Behavior of Fundamental Solutions and Potential Theory of Parabolic Operators with variable Coefficients, to appear in Math. Ann..

[K] L.P. KUPCOV, The mean property and the maximum principle for the parabolic equation of second order, Soviet Math. Dokl. 19 (1978), 1140-1144.

[NS] P. NEGRINI, V. SCORNAZZANI, Superharmonic function and regularity of boundary points for a class of elliptic parabolic differential operators, BUMI, C(3), 1 (1984), 85-107.